Point fixe de Brouwer.

Leçon : 203, 204, 206, 214, 215, $\boxed{253}$ → faire des corollaires sur les convexes (cf notes théo).

Réf : Calcul différentiel, S. Gonnard, N. Tosel

Théorème

Soit B la boule unitée fermée de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : B \to B$ continue.
Alors f a un point fixe dans B.

Preuve

Stratégie : → par l'absurde, utiliser un chgt de variable astucieux
→ se ramener au cas $\mathcal{C}^1$.

On suppose par l'absurde que $f : B \to B$ ne possède pas de point fixe.

1) On se ramène au cas $\mathcal{C}^1$

B est compacte, on fixe donc $\varepsilon > 0$ tq $\forall x \in B$, $\|f(x) - x\| > \varepsilon$.

En effet, un tel $\varepsilon > 0$ existe. Sinon, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existerait $x_n \in B$ tq $\|f(x_n) - x_n\| \leq \frac{1}{n}$. Donc $(f(x_n) - x_n)_{n \geq 1}$ cv vers 0.

Or $(x_n)_n \subset B^{\mathbb{N}}$, donc par Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\Uparrow$ tq $x_{\varphi(n)} \to y \in B$.

Or f continue, donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(y)$, et donc $y = f(y)$, $y \in B$. Absurde.

Par Stone-Weierstrass, on fixe $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont polynomiales tq $\|f - P\|_\infty < \varepsilon/2$. Alors pour tout $x \in B$, $\|P(x)\| \leq \|P(x) - f(x)\| + \|f(x)\| < 1 + \varepsilon/2$. On pose donc $Q = \frac{1}{1+\varepsilon/2} P$. On a $Q(B) \subset B$, Q est $\mathcal{C}^1$, et

$\forall x \in B$, $\|\varphi(x) - g(x)\| \leq \|\varphi(x) - p(x)\| + \|p(x) - g(x)\|$

$\leq \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon/2}\right)\|p(x)\| + \varepsilon/2$

$\leq \varepsilon$.

donc $\|\varphi(x) - x\| \geq \|g(x) - x\| - \|g(x) - \varphi(x)\|$

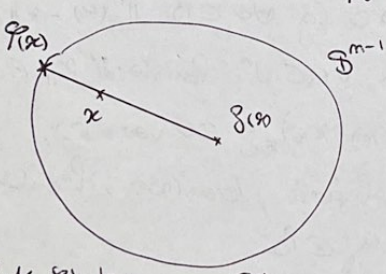
> 0, donc φ n'a pas de point fixe.

Quitte à remplacer f par φ, on peut supposer $f \in \mathcal{E}'$.

2) Construction d'une application $\varphi : B^n \to S^{n-1}$, $\mathcal{C}^1$, t.q. $\varphi|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$.

g n'a, par hypothèse, pas de point fixe, donc $\forall x \in B^n$, $x \neq g(x)$.

On note alors $\varphi(x)$ le point d'intersection (unique) de S^{n-1} avec la demi droite $\Delta_x = \{g(x) + \lambda(x - g(x)),\ \lambda \geq 0\}$.



Rq $\varphi \in \mathcal{E}^1$ et que $\varphi|_{S^{n-1}} = id_{|S^{n-1}}$

On a $\varphi(x) = g(x) + \lambda(x)(x - g(x)) \in S^{n-1}$. On résout

$\|g(x) + \lambda(x)(x - g(x))\|^2 = 1$, $\lambda(x) \geq 0$.

Donc $\lambda(x)^2 \|x - g(x)\|^2 + 2\lambda(x) \langle g(x), x - g(x) \rangle + \|g(x)\|^2 - 1 = 0$.

On note $\Delta(x) = 4\langle g(x), x - g(x)\rangle^2 - 4\|x - g(x)\|^2 (\underbrace{\|g(x)\|^2 - 1}_{<0}) \geq 0$

donc $\lambda(x) = \dfrac{-2\langle g(x), x - g(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x - g(x)\|^2}$, (on choisit la racine ≥ 0).

Donc λ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc φ aussi. De plus, si $x \in S^{n-1}$, alors $\varphi(x) = x$ par construction.

3) Montrons que φ n'existe pas d'application $\varphi : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$, t.q $\varphi|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$. (Lemme de non retraction).

3) Lemme de non rétraction

On a admis que $\varphi : B \to S$, donné C^1, $\varphi|_S = \mathrm{Id}_S$.
Montrons que c'est impossible.

★ On pose : • $\forall t \in [0,1]$, $\varphi_t : B \to B$
$x \longmapsto (1-t)x + t\varphi(x)$

• et $P(t) = \int_{\mathring{B}} \det J(\varphi_t)(x)\, d\lambda(x)$
↑ mesure de Lebesgue
↳ polynomiale en t

★ $\forall x \in B$, on a $\|\varphi(x)\|^2 = 1$, donc $\langle \varphi(x), d\varphi(x)(R) \rangle = 0$ pour tout $R \in \mathbb{R}^n$. Donc $\mathrm{Im}\, d\varphi(x) \subset \{\varphi(x)\}^\perp$, donc $d\varphi(x)$ n'est pas inversible. Donc $\det J(\varphi)(x) = \det J(\varphi_1)(x) = 0$
donc $P(1) = 0$.

★ Montrons que φ_t est injective pour t assez petit.

Soient $t \in [0,1[$, $x, y \in B$ tels que $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$

On a $(1-t)\|x-y\| = t\|\varphi(x) - \varphi(y)\|$. Comme φ est C^1, l'IAF donne $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M\|x-y\|$, où $M = \sup_{z \in B} \|d\varphi(z)\| < +\infty$.

On a alors $\|x-y\| \leq \frac{Mt}{1-t}\|x-y\|$, d'où $x = y$ si $t < \frac{1}{1+M} =: \alpha$
(car $\frac{Mt}{1-t} < 1 \iff t(M+1) < 1 \iff t < \frac{1}{M+1}$).

Donc φ_t injective pour $t < \alpha$.

* Pour tout $t<\alpha$, tout $x \in S$, on a $\varphi_t(x) = x$.

Donc

* Pour $r<\alpha$, $x \in S$, on a $\varphi_t(x) = x$, donc $\varphi_t(\mathring{B}) \in \mathring{B}$ par injectivité de φ_t.

* Pour $r<\alpha$, $x \in B$, on a $\det J(\varphi_t)(x) = a_m(x)t^m + \dots + a_1(x)t + 1$ car les a_i sont continues sur B. On pose

$$m = \sup_{\substack{x \in B \\ t \in [0,1]}} |a_m(x)r^{m-1} + \dots + a_1(x)|.$$

Pour $r < \rho := \min(\alpha, 1/m)$, on a

$$|a_m(x)t^m + \dots + a_1(x)t| = t \times |a_m(x)r^{m-1} + \dots + a_1(x)| < \frac{1}{m} \times m = 1,$$

donc $\det J(\varphi_t)(x) > 0$.

Par TIG locale, φ_t est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathring{B}$ sur $\varphi_t(\mathring{B})$, pour $r<\rho$, et $\det J(\varphi_t)(x) > 0$ sur $\mathring{B}$. ouvert.

* Mq $\varphi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$, par connexité.

. $\varphi_t(B)$ couvert de $\mathring{B}$

. $\varphi_t(B)$ non vide

. Si $(y_m) = (\varphi_t(x_m)) \in \varphi_t(\mathring{B})^{\mathbb{N}}$. Soit x une valeur d'adhérence de $(x_m)_m$, par continuité de φ_t, on a alors $\varphi_t(x) = y$, ~~donc $y \in$~~ Si $r<\rho$, on a $x \notin S^{m-1}$ ~~par injectivité de φ_t~~, donc $x \in \mathring{B} \Rightarrow y \in \varphi_t(\mathring{B})$.

! fermé de $\mathring{B}$.

$y_m \to y$

Donc $\varphi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$ par connexité.

* Pour $t < \beta$, on a $P(t) = \int_{\mathring{B}} \det J(\varphi_t)(x)\, d\lambda(x)$

$\det J(\varphi_t)(x) > 0$

$= \int_{\mathring{B}} |\det J(\varphi_t)(x)|\, d\lambda(x)$

Changement de variable

$= \int_{\varphi_t(\mathring{B})} d\lambda(x)$

$= \lambda(\varphi_t(\mathring{B}))$,

donc on a $P(1) = 0$.

□

En dimension infinie : Schauder.

Thm (Schauder)

Soient E un evn, K fermé, convexe, non vide.

Soit $\Phi : K \to K$ continue, $\Phi(K)$ relativement compact dans E. Alors Φ admet un point fixe dans K.

On détaille pour le cas de la leçon 253 (choisir quoi faire si 253 ; étude des convexe >>> inversion locale...)

On va montrer le théorème suivant :

Théorème

Toute fonction continue d'un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$ dans lui même admet un point fixe.

⊕ généralement, si $X \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\text{et}}} \underset{\text{boule unité fermée de } \mathbb{R}^n}{B}$ sont homéomorphes via φ, alors toute application $f : X \to X$ continue admet un point fixe.

En effet, $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : B \to B$ est $\mathcal{C}^0$, donc admet un point fixe x : $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = x$

$\Rightarrow f(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x)$. f admet un point fixe.

Il faut donc mq qu'un convexe compact d'intérieur non vide est homéomorphe à C.

→ on le fait avec la jauge d'un convexe.

↳ pour revenir au thm, l'hyp intérieur $\neq \emptyset$ n'est pas grave. On considère F le sous-espace affine engendré par C, muni de la top induite. Alors $\mathring{C} \neq \emptyset$ dans F

cf [Brezis] pour toutes les propriétés.

Déf : $p(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$, $C \subset E$.

Prop i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$.

ii) $\forall x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ ($\Rightarrow p$ continue)

iii) $\exists M$ tq $\forall x$, $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$

iv) $C = \{x \in E, p(x) \underset{\uparrow}{\leq} 1\}$.
fermé !

On pose $f : x \in E \mapsto \begin{cases} \frac{p(x)x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ on mq : - f continue
- f bijective
- f^{-1} continue
- ~~f~~ $f^{-1}(\bar{B}) = C$.

cf notes Théo

Application.

Soit $v : B \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu, et rentrant sur la sphère càd $\forall x \in S$, $x \cdot v(x) \leq 0$. Alors v s'annule en au moins un point de B.

Preuve.

Par l'absurde, si v ne s'annule pas sur B. On pose alors

$f : B \to B$, $x \mapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, continue.

Donc f admet un point fixe, par le théorème de Brouwer.

Soit donc $x \in B$ tel que $f(x) = x$.

On a alors $x = \frac{v(x)}{\|v(x)\|} \Rightarrow 1 = x \cdot x = \|x\|^2 = \frac{x \cdot v(x)}{\|v(x)\|} \leq 0$.

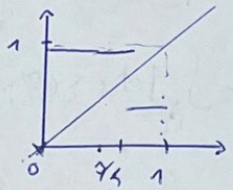
contradiction.

□

Des contres exemples.

(• ϕ convient : $f(x) = x$)

• f n'est pas continue.



• sur la boule ouverte : $f(x) = \sqrt{x}$. $f(x) = x$

$\Leftrightarrow x^2 = x$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

• on donne un exemple dans $\ell^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_n, \sum_n |x_n|^2 < +\infty\}$

$f : B \to B$, $x = (x_n) \mapsto (\sqrt{1 - \|x\|_2^2}, x_0, \dots)$.

$x \quad x_1$

→ f continue.

→ $f : B \to B$

→ ϕ point fixe. si $f(x) = x$

alors $\|f(x)\| = \|x\| \Rightarrow \|x\| = 1$

donc $x_0 = 0$, $x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow x = 0$.